

## Matematikai módszerek a mechanikában

**Andor Krisztián, Polgár Rudolf**

Nyme SKK, Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet  
krisztian.andor@skk.nyme.hu, polgar@nyme.hu

**ÖSSZEFOGLALÓ.** A kényszerpályás közlekedés esetén a mozgás alapján meghatározott pálya alapvető követelmény. A lineáris görbületi tulajdonságú klotoid átmenetiívet spline-okkal modellezve eddig ismeretlen információkhoz jutottunk. A modellezés további dimenziókat is feltárt, mely során egyszerűen vizsgálhatókká váltak egyéb mozgáskinematikai effektusok.

**ABSTRACT.** In railway transportation it is a fundamental requirement to have track geometry that corresponds to the desired motion. With the modelling of the clothoid transition curve with splines, hitherto unknown information are gained. This modelling has open new dimensions, which helps the simply examination of other kinematic motion-effects.

### 1. A mozgás leírása

A kötőtpályás vasúti közlekedésnél a pályának meghatározó szerepe van a jármű mozgása során ébredő kinematikai igénybevételek keletkezésében. Ezért fontos, hogy olyan geometriai kialakításúak legyenek az íves vágányszakaszok, melyen a kinematikai mozgásjellemzők értékei küszöbérték alatt maradnak. A tervezés során ezért kinematikai szempontok nem hagyhatók figyelmen kívül.

A különböző görbületi tulajdonságú pályaszakaszok (körív = konstans görbület, egyenes = 0 görbület) a hirtelen változó oldalgyorsulás miatt nem követhetik egymást, ezért közéjük iktatják be az átmenetiívet, mely a két eltérő, konstans görbületű szakaszt egy változó görbületű szakasszal köti össze, biztosítva ezzel az oldalgyorsulás fokozatos növekedését vagy csökkenését, szemben az ugrásszerű változással. A vasútépítésben az oldalgyorsulás megváltozását  $\bar{h}$ -vektornak nevezik, mely magasabbrendű kinematikai mozgásjellemzőnek számít, és azt döntően a görbületfüggvény ívhossz szerinti első deriváltja befolyásolja. A  $\bar{h}$ -vektor – éppúgy, mint az oldalgyorsulás – nem léphet át egy határértéket, mely a pálya és az utasok fokozottabb igénybevételét okozná.

A hullámos görbületfüggvényű átmenetek esetén a függvény deriváltja minden nehézség nélkül előállítható, azonban a lineáris görbületfüggvény töréspontjaiban a derivált értelmezhetetlen. Noha kinematikai szempontból a lineáris görbületfüggvényt szakaszosan deriválva a legjobb geometriai kialakítású átmenetiív lenne, a két csatlakozási pontban (görbületi töréspontokban) a kinematikai mozgásjellemzők nem ismertek, így feltételezhető akár, hogy elméletileg végtelen nagy értékeket vehetnek fel. Erre alapozva külön csoportokra bontották az átmenetiíveket a görbületfüggvényük deriválhatósága szerint. Így más határértékek vonatkoztak a folytonosan differenciálható görbületfüggvényű, és más, szigorúbb határértékek a töréses görbületfüggvényű átmenetiívekre.

Értekezésemben kettéosztás szükségtelen voltára hívom fel a figyelmet.

Mivel a klotoid átmenetiív a legelterjedtebb átmenetiív-fajta a világon, joggal felmerül az igény az átmenetiívvvel kapcsolatos általános ismeretek kiegészítésére.

## 2. A spline-okkal modellezett vasúti vágánytengely-vonal leírása

A klotoid átmenetiív csatlakozásainál fellépő  $\bar{h}$  -vektor nagyságának numerikus meghatározására van szükség, hogy közvetlenül összehasonlítható legyen más, folytonosan deriválható görbületfüggvényű, átmenetiívekkel.

Erre biztosított lehetőséget a spline-elmélet. A spline-okkal leírható módszert műszaki területen alkalmazták már a középkorban is. A hajóépítésben felvetődött probléma – miszerint az áramvonalas hajótest-geometriát egy meggörbített pálca vonala szolgálja – és a vasúti átmenetiívek kialakítása között analógia található. Matematikailag ezt a modellt a spline-okkal lehet leírni.

A spline-okkal leírt a vasúti pálya modelljének több szempontnak kell megfelelnie.

Az első szempont alapján, a pályagörbe modelljétől elvárjuk, hogy legalább négyszer folytonosan differenciálható legyen, még az átmenetiív eleje és vége pontban is. A spline-ok rendűségét mi választhatjuk meg, így a kellő számú differenciálás végrehajtható. Így az eredetileg töréses görbületfüggvényű pálya spline-nal közelített modelljének görbületfüggvénye nem töréses lesz. A kérdéses pontokban folytonosan differenciálható függvényeket vizsgálhatunk. Amennyiben legalább ötödfokú spline-nal dolgozunk, a görbületfüggvény első és második deriváltfüggvénye előállítható lesz.

A második szempont szerint a kitűzési pontok nem esnek az ideális pálya vonalába, melynek okai a következők:

- A kitűzési koordináták nem egzakt módon, hanem a sorbafejtés során, csupán a hatványsor első két tagjának figyelembevételével lettek kiszámítva.
- Az így kiszámított értékeket az ívkitűző zsebkönyv csak mm-re kerekített pontossággal adja meg.
- A geodéziai kitűzés során a kitűzési koordináták kitűzési hibával terheltek.

Ez azt eredményezi, hogy a fent említett módon meghatározott koordinátrapontok (kitűzési pontok) hol az ideális pálya egyik, hol a másik oldalára kerülnek és minimális annak az esélye, hogy tökéletesen a göbe vonalára essenek.

Az alapgondolat szerint a spline-nal lehetséges olyan függvényt konstruálni, mely nem illeszkedik közvetlenül a kitűzési pontokra, és a kitűzési pontossággal elkövetett hibát nem haladja meg.

Az approximációs spline értéke egy adott illeszkedési pontnál (64) szerint:

$$\tilde{y}_i = y_i \pm \varepsilon_i,$$

ahol:  $\tilde{y}_i$  a spline értéke,

$y_i$  a kitűzési pont y ordináta értéke,

$\varepsilon_i$  a spline értéke és a pont közötti eltérés.

Az  $\varepsilon_i$  eltéréseknek kicsiny értékűeknek kell lenniük, ami esetünkben teljesül, hiszen a koordináták meghatározásakor a sorbafejtés és a kerekítés során csupán tizedmilliméteres hibákat vétünk. Az így előállított görbéről elmondható, hogy nem túl nagy eltérésekkel illeszkedik a kitűzési pontokra, miközben igyekszik egy minimális összgörbület-változású görbe vonalát adni.

Miután számunkra a tervek és az ívkitűző zsebkönyv adatai alapján kitűzött pályán ébredő kinematikai igénybevételek nagysága a meghatározó, (nem pedig az elméleti függvényen keletkező mozgásjellemzőké) a vágánytengely spline-nal történő helyettesítésével a valósághoz közelebb álló eredményt kapunk, amennyiben a hiba határértéke a megvalósíthatósági pontosságot nem haladja meg.

A harmadik, a modellezésnél figyelembeveendő szempont szerint a pontok eltérő nagyságban térnek el az ideális görbe vonalától, ezért figyelembe kell venni az eltérések nagyságának változását. Az eltéréseket úgy célszerű súlyozni, hogy a spline nagyobb súllyal

közelítse a minimális összgörbület-változású görbe vonalához közel eső pontokat, és kisebb súllyal a távolabb esőket.

A görbületfüggvény – amely alapján a kitűzési koordináták adottak – csupán a kitűzési pontokban és a görbületfüggvényből történő inetrpolálással az aljaknál egyezik a kivitelezett pálya görbületfüggvényével, míg a pontok között azt a sín pár rugalmassága határozza meg.

### 3. A spline-ok alkalmazásával létrehozott átmenetiív geometriai pontossága

A spline-elmélettel kapott görbe illeszkedési pontosságát bemutatandó, meghatároztam a kitűzési értékpárokat 1,0 m-es egymást követő távolságra századmilliméteres pontossággal. Ezt tekintem elméleti kitűzésnek

Az 5 m-es távolságra lévő kitűzési pontokra illesztett spline-helyszínrajz-függvényről leolvasott méterenkénti értékek és az elméleti kitűzés közötti  $\Delta f(x, y) = f(x, y)_{\text{kitűzési}} - f(x, y)_{\text{méterenkénti}}$  eltérés szintén elhanyagolható volt. A legnagyobb eltérés nagysága nem haladta meg a fél millimétert.

Tekintettel arra, hogy a megépítés során a kitűzési koordináták mm-re kerekítve adottak, és ezen pontok a kitűzési hibával terheltlen lesznek kitűzve, a spline-elmélettel meghatározott átmenetiívmodell pontossága meghaladja az elvárásokat. Ezzel igazolható, hogy a spline-elmélet segítségével lehetséges a gyakorlatban az átmenetiívek megfelelő pontosságú modelljeinek létrehozása.

### 4. A kinematikai mozgásjellemzők meghatározása az átmenetiívek mentén

A fenti szempontokat kielégítő modellezéssel kiszámíthatók lettek a klotoid átmenetiív esetében a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemző vektorok a két, eddig kérdéses csatlakozási pontokban is.

Ezeket az értékeket közvetlenül össze lehet hasonlítani más típusú átmenetiíveknél kapott igénybevétel-értékekkel.

A görbületváltozás jellege alapján megkülönböztetett, elméleti feltételezéseken alapuló előírások nem befolyásolják az átmenetiívek összehasonlíthatóságát.

Az elméleti megfontolások alapján a görbület által meghatározott pályavonal a gyakorlatban csupán pontokban egyezhet a megvalósítandó pálya vonalával, mivel a gyakorlatban a vágánytengely vonalát a kitűzési pontok határozzák meg. Az elméleti görbületfüggvény közelítésével csak milliméter pontossággal lehet kitűzni 3-5 méteres távolságban a pontokat, melyekre fektetik a vasúti vágányt. Az aljtávolságra besűrített illeszkedési pontok között a vágány alakját a sín görbülete határozza meg. Megállapítható, hogy a pályatengelyt meghatározó elmélet, és a megvalósult pályatengely között differencia van. Ezt az eltérést érdemes figyelembe venni a vasúti vágány modellezése során.

Az elméleti pályatengely és a megvalósult pályatengely közötti eltérést tudjuk a spline-okkal figyelembe venni, mivel azok természetükből fakadóan viselkednek úgy, ahogyan a gyakorlatban a meghajlított vasúti sín. A spline-ok további tulajdonságai közé tartozik a rendjük meghatározhatósága, így a pályagörbe vonalát leíró függvény szükséges mennyiségben folytonosan deriválható (nem csak szakaszonként), ezek után a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemző vektorok függvényei is meghatározhatók.

A spline-okkal modellezett klotoid átmenetiíven – a spline megfelelő mennyiségben és folytonos deriválhatósága miatt – a keletkező kinematikai mozgásjellemző vektorok

függvényei pontosan meghatározhatókká váltak. A spline-elmélet segítségével kapott kinematikai igénybevétel-szélsőértékek a klotoid átmenetiív esetében közvetlenül összehasonlíthatókká váltak más átmenetiíveknel számított szélsőértékekkel. Az összehasonlítások elvégezéssel – a megépíthetőségi pontosságot is figyelembe véve – a klotoid átmenetiív bizonyult minden esetben kinematikai szempontból a legjobb átmenetiív-geometria kialakításnak.

## 5. Súlypontpálya leírása

Vizsgálat tárgyává tettem a vágány tengelyvonala, és a merev testszerű kocsiszekevény súlypontpályája közötti eltérés meghatározását.

A kutatást a kinematikai vizsgálatok során a mozgás pontmozgásként történő modellezése indokolta. A kocsiszekevény súlyát – pontként való helyettesítése során – a súlypontba célszerű sűríteni. A súlypont pályáján ébredő kinematikai igénybevételek a meghatározók, és nem a vágánytengely-pályán keletkezők, ahol csupán a megvezetett kocsiszekevény forgózsámolyai futnak. Ezáltal a klotoid átmenetiív csatlakozásainál lévő görbületi törés lekerekedik, ami kedvezően befolyásolja a magasabbrendű kinematikai mozgásjellemzők alakulását. Ez ismét a klotoid átmenetiív alkalmazásának előnyét bizonyítja kinematikai szempontból.

## 6. Irányhibák lokalizálása és meghatározása a spline-módszerrel

A spline-elmélet – természetéből fakadóan – irányhiba lokalizálására is alkalmas. Irányhibák lokalizálására történő alkalmazhatóságát más szabályozómódszerrel (érintőszög-eljárás) történt összehasonlítással vizsgáltam. Az approximációs súlyozással közelítő spline figyeli a minimális összgörbület-változású görbétől a pontok távolságát, és ezen távolság alapján veszi figyelembe a pont súlyát a görbe megalkotásában. Ez a súlyozás állítható be úgy, hogy a spline a megvalósíthatósági pontosságot figyelembe véve illeszkedjen a kitézési pontokra. Így a túlzott eltérések olyan következményekkel járnak, hogy a spline-elmélet alulsúlyozza az adott hibás pontot, és a spline görbéjének meghatározásában nem játszik szerepet. Vagyis az így kieső pontok kigyújthatók, a görbétől való távolságuk meghatározható, mely egyben a szabályozás értéke is.

## Irodalomjegyzék

- [1] **Vaszary P.:** Vasútépítés és Pályafenntartás I., MÁV Rt., Budapest, (1999) 35-56.
- [2] **Megyeri J.:** Vasúti mozgásgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1986).
- [3] **Hasslinger, L. H., Stockinger, H.:** Messtechnischer Nachweis der Überlegenheit eines neuen Trassierungselement, des „Wiener Bogens“, ZEVrail Glasers Annalen, 128. évf. (2004) szept., 66-77.
- [4] **Hainitz, H., Heindl, W., Presle G.:** Neugestaltung von Übergangsbögen. Öster-reichische Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift, 138. évf. 10. sz., (1993) 388-395.
- [5] **Kisgyörgy L.:** Szinuszhiperbolikus átmenetiív, Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat, Budapesti Műszaki Egyetem, Vasútépítési Tanszék, Budapest, (1994).
- [6] **Sard, A., Weintrub, S.:** A book of splines, John Wiley and Sons, Mc. New York, (1971).
- [7] **Polgár R.:** Általánosított spline-approximáció, Geomatikai közlemények VII. MTA GGKI, Sopron, (2004) 197-209.
- [8] **Kerkápoly E., Megyeri J.:** Vasúti ívkitűzési táblázatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1980).
- [9] **Megyeri J.:** Vasútépítéstan, Közlekedési Dokumentációs Vállalat, Budapest, (1991).
- [10] **Kormos Gy.:** Ívszabályozás számításos érintőszög-eljárással koszinusz-átmenetiív esetén. Közlekedéstudományi Szemle, 45. évf. 1. sz., (1995) 18-23.
- [11] **Andor K., Polgár R.:** Localization of bearing errors using spline method, Periodica Polytechnica **CE** **58:**(7528), (2014) 1-7, (doi: <http://dx.doi.org/10.3311/PPci.7528>).